

Раздел VII Физика твердого тела

Глава V. Колебания кристаллической решетки.

Излучение черного тела.

1. Колебания кристаллической решетки

С классической точки зрения волны упругости описываются волновыми функциями вида:

$$\psi(\vec{r}, t) = ce^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$k = \frac{\omega}{V_{\phi}} \quad V_{\phi} - \text{фазовая скорость волны}$$

упругости

С квантовой точки зрения, каждой волне упругости соответствует квазичастица фонон с энергией и импульсом:

$$\varepsilon = \hbar\omega$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\hbar\omega}{V_{\phi}}$$

Плотность квантовых состояний для фононов:

(каждому вектору $\vec{k}$ соответствует 3 независимых типа колебаний: 2 поперечных и 1 продольная мода)

$$dG(p) = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} \times 3$$

$\Downarrow$

$$dG(\omega) = \frac{3V\omega^2 d\omega}{2\pi^2 V_{\phi}^3}$$

$\Downarrow$

$$\int_0^{\omega_{\max}} dG(\omega) = 3N$$

⇓

$$\frac{3V\omega_{\max}^3}{6\pi^2V_{\phi}^3} = 3N \quad N - \text{число атомов}$$

$3N$ – полное число
степеней свободы

⇓

$$\omega_{\max} = V_{\phi}(6\pi^2n)^{1/3} \quad n = \frac{N}{V} - \text{концентрация}$$

атомов

⇓

$$g(\omega) = \frac{9N\omega^2}{\omega_{\max}^3}$$

$\omega_{\max}$ - максимальная частота волн

упругости

В состоянии термодинамического равновесия волны упругости – это тепловые колебания решетки. Энергия тепловых колебаний равна:

$$U = \int_0^{\omega_{\max}} \hbar\omega[\langle n(\omega) \rangle + \frac{1}{2}]g(\omega)d\omega$$

Так как фононы являются бозонами, среднее число фононов в квантовом состоянии:

$$\langle n(\omega) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \quad (\mu = 0)$$

⇓

$$U = \frac{9}{8}N\hbar\omega_{\max} + \frac{9N\hbar}{\omega_{\max}^3} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Первое слагаемое – энергия нулевых колебаний U_0 .

Второе слагаемое можно вычислить приближенно в зависимости от параметра, который называется температура Дебая:

$$\theta_D = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k}$$

$$A) T \ll \theta_D \quad \rightarrow$$

Закон Дебая –

$$\begin{aligned} U &= U_0 + DT^4 \\ C &= \frac{\partial U}{\partial T} \sim T^3 \end{aligned}$$

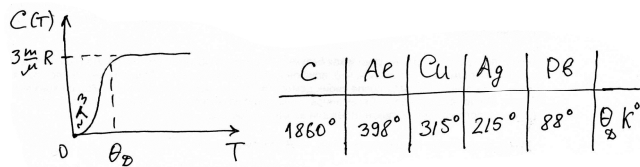
Б) $T \gg \theta_D$ (классический предел)

Закон Дюлонга и Пти –

$U = U_0 + 3NkT$
$C = 3Nk = 3 \frac{m}{\mu} R$

C – теплоемкость кристалла

В общем случае зависимость теплоемкости кристалла от температуры имеет вид $C(T)$:

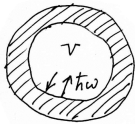


Для многих металлов теплоемкость при комнатных температурах можно вычислять по классической формуле Дюлонга и Пти. Формула Дюлонга и Пти получается в предположении, что на каждую степень свободы колебательного движения атома в узле кристаллической решетки приходится энергия равная kT (закон равнораспределения).

2. Излучение черного тела

Излучательная способность черного тела была найдена Планком в предположении, что излучение света нагретыми телами

происходит порциями – квантами.



Пусть тепловое излучение находится в равновесии с нагретой поверхностью черного тела. С квантовой

точки зрения тепловое излучение – газ фотонов, энергии и импульсы которых:

$$\varepsilon = \hbar \omega$$

$$\bar{p} = \hbar \bar{k}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad p = \frac{\hbar \omega}{c}$$

Функция плотности квантовых состояний фотонов (каждому вектору $\bar{k}$ соответствует 2 независимых поперечных поляризации):

$$dG(p) = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} \times 2$$

$\Downarrow$

$$dG(\omega) = \frac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

$\Downarrow$

$$g(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

Спектральная плотность энергии фотонного газа:

$$U(\omega) = \frac{\hbar\omega \langle n(\omega) \rangle g(\omega)}{V}$$

Так как фотоны являются бозонами, среднее число фотонов в квантовом состоянии:

$$\langle n(\omega) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \quad (\mu = 0)$$

Излучательная способность черного тела в состоянии равновесия с тепловым излучением равна спектральной плотности потока энергии теплового излучения, падающего на поверхность:

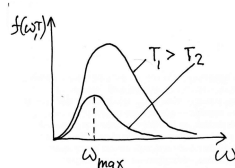
$$f(\omega, T) = \frac{1}{4} c n_{\omega} \hbar\omega = \frac{1}{4} c U(\omega)$$

↓

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Закон смещения Вина:

$$\hbar\omega_{\max} = 2,8kT$$



Закон Стефана-Больцмана:

$$q = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4 \frac{Bm}{m^2}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{Bm}{m^2 K^4}$$

Вопросы:

1. Что такое фононы
2. Закон Дебая
3. Закон Дюлонга и Пти
4. Что такое температура Дебая
5. Зависимость теплоемкости кристалла от температуры в общем случае
6. Что такое фотоны
7. Излучательная способность черного тела
8. Закон смещения Вина
9. Закон Стефана – Больцмана